Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Лукашов Никита Вадимович

Аксиоматика геометрии оригами

Курсовая работа студента 3 курса
образовательной программы бакалавриата
«Совместный бакалавриат ВШЭ и ЦПМ»

Научный руководитель:
академик РАН, доктор ф.-м. наук,
профессор
Беклемишев Лев Дмитриевич

Москва 2022

Содержание

1 Введение **3**

2 Предварительные сведения **4**
2.1 Абсолютная геометрия 4
2.2 Аксиомы для ортогональности 7

3 Аксиомы для симметрии **8**
3.1 Список аксиом 8
3.2 Первые следствия 9

4 Эквивалентность аксиом ортогональности и симметрии **10**
4.1 Вывод $\perp$ из Sym 11
4.2 Вывод Sym из $\perp$ 14

5 Заключение **15**

Список литературы **16**

1 Введение

Оригами — древнее искуство складывания фигурок из бумаги, берущее свои корни в Древнем Китае (где была изобретена бумага) и популярное по сей день. При этом в процессе запрещается пользоваться ножницами или клеем, а можно только сгибать лист бумаги (как правило, квадратной формы).

Для достижения наибольшей точности в сложении фигуры, по аналогии с построениями циркулем и линейкой, J. Justin [Justin, 1989] и H. Huzita [Huzita, 1989] предложили следующий список из шести операций (H-1), ..., (H-6), позже названных Huzita-Justin или Huzita-Hatory аксиомами.[1]

(H-1): Для данных двух точек P_1 и P_2 можно сделать изгиб, проходящий через обе эти точки.

(H-2): Для данных двух точек P_1 и P_2 можно сделать изгиб, совмещающий точку P_1 с точкой P_2.

(H-3): Для данных двух прямых l_1 и l_2 можно сделать изгиб, совмещающий прямую l_1 с прямой l_2.

(H-4): Для данных прямой l и точки P можно сделать изгиб, ортогональный l и проходящий через точку P.

(H-5): Для данных двух точек P_1 и P_2 и прямой l_1 можно сделать изгиб, помещающий точку P_1 на прямую l_1 и проходящий через точку P_2.

(H-6): Для данных двух точек P_1 и P_2 и двух прямых l_1 и l_2 можно сделать изгиб, помещающий точку P_1 на прямую l_1 и точку P_2 на прямую l_2.

Сегодня перечисленные выше положения не могут быть считаться аксиомами в строгом логическом смысле — скорее они специализируют множество операций, задающих некоторые построимые оригами точки на плоскости. Поэтому одним из открытых вопросов является формализация Huzita-Justin аксиом.

В статье [Beklemishev et al., 2020] предлагается одна из возможных аксиоматик плоскости оригами, где в качестве базовых понятий берутся

(i) отношение *инцидентности* $P \in l$ между точками и прямыми,

(ii) отношение *ортогональности* $l_1 \perp l_2$ между двумя прямыми,

(iii) отношение *лежать между* или *порядка* для трёх точек P_1, P_2, P_3, обозначаемое $Be(P_1, P_2, P_3)$

и для них задаются соответствующие аксиомы (в языке 1-го порядка). В результате, авторы получают неразрешимость первопорядковой теории их аксиоматики оригами.[2]

В разделе Duscussion авторы также отмечают, что выбор языка для аксиоматизации геометрии оригами является далеко не единственным. Хотя ортогональность

[1] их хорошую визуализацию можно посмотреть на данном сайте в разделе «Origami Axioms»: https://mathigon.org/course/euclidean-geometry/origami

[2] [Beklemishev et al., 2020], теорема 6.

прямых является естественной с точки зрения построений оригами — её можно проверить с помощью только одного изгиба — однако аксиомы (H-1), ..., (H-6) довольно просто формулируются в терминах симметрии $Sym(A, l, B)$ двух точек по отношению к прямой . Было бы естественней рассмотреть это понятие базовым, а ортогональность — определяемым.

Поэтому в качестве Задачи 1 авторы предлагают найти естественную аксиоматику упорядоченных метрических плоскостей By в терминах $\in$ и Sym. В данной курсовой работе предоставляется одно из возможных её решений.

В разделе 3.1 будут предложены аксиомы для отношения Sym, затем в разделе 4 будет показано, что приведённая аксиоматика является эквивалентной аналогичной для ортогональности, использованной в работе [Beklemishev et al., 2020]. При этом для доказательства эквивалентности будут использованы аксиомы инцидентности Гильберта (I-1, I-2, I-3), аксиомы Дезарга (De-1, De-2), параллельности (ParAx) и бесконечности (InfLines), приведённые в разделе 2.

В заключении будет доказана теорема 1, утверждающая, что полученная аксиоматика для геометрии оригами в языке $\{Sym, \in, Be\}$ также оказывается неразрешимой.

2 Предварительные сведения

Язык состоит из переменных двух сортов: точки $(A, B, C, \ldots)$ и прямые $(l, m, n, \ldots)$. В данной работе мы будем использовать следующие базовые понятия:

(i) отношение *инцидентности* $P \in l$ между точками и прямыми,

(ii) отношение *ортогональности* $l_1 \perp l_2$ между двумя прямыми,

(iii) отношение *симметрии* $Sym(A, l, B)$ двух точек относительно прямой.

2.1 Абсолютная геометрия

В этом разделе мы перечислим аксиомы, по модулю которых мы будем доказывать эквивалентность аксиоматик для ортогональности и симметричности.

Аксиомы Гильберта для инцидентности

(I-1): Для двух различных точек A и B найдётся единственная прямая l, такая что $A \in l$ и $B \in l$.

(I-2): Любой прямой, по крайней мере, принадлежит две различные точки.

(I-3): Найдётся три различные точки A, B, C, такие что никакая прямая l не содержит все из них.

Аксиома Гильберта о параллельных (сильная версия)

(ParAx): Пусть дана произвольная прямая l и точка A, не принадлежащая ей. Тогда существует единственная прямая, определённая l и A, которая проходит через A и не пересекает l.

Схема аксиом бесконечности и аксиомы Дезарга

Определение 1. Три точки A, B, C с фиксированным порядком образуют *треугольник* ABC. В этом случае, точки A, B, C называются *вершинами* и соединяющие их прямые AB, AC, BC — *сторонами* этого треугольника.

Определение 2. Четыре точки A, B, C, D с фиксированным порядком образуют *параллелограмм* $ABCD$, если эти точки различны друг от друга, любые три из них не лежат на одной прямой, и прямые AB и CD, соединяющие точки A, B и C, D соответственно, параллельны, а также прямые AD и BC, соединяющие точки A, D и D, C соответственно, параллельны; т. е. $AB \parallel CD,\ AD \parallel BC$.

В этом случае точки A, B, C, D называются *вершинами*, A, C и B, D — две пары *противоположных вершин* параллелограмма $ABCD$; AB, BC, CD, AD — четыре *стороны* $ABCD$; при этом пары сторон AB, CD и BC, AD будем называть *противоположными*. Наконец, AC и BD назовём *диагоналями* параллелограмма $ABCD$.

Начиная с двух точек A, B, можно построить параллелограмм следующим образом ([Wu, 2012], с. 19). По аксиоме I-3, найдётся другая точка C, не лежащая на прямой AB. По аксиоме ParAx мы можем провести прямую, проходящую через B и параллельную AC, и прямую, проходящую через C и параллельную AB. Снова по аксиоме ParAx, построенные прямые с неизбежностью пересекаются в точке — обозначим её D. Тогда $ABCD$ — искомый параллелограмм.

(InfLines): Для данных точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, и прямой l, такой что $A \in l$ и $B, C \notin l$, построим прямую l_1, проходящую через C и параллельную AB, и возьмём за A_1 пересечение l_1 и l. Индукцией, определим l_n как прямую, проходящую через C и параллельную A_nB, и обозначим через A_{n+1} её пересечение с l. Тогда все A_i являются различными.

Аксиома бесконечности влечёт, что точек на любой прямой бесконечно много, а также, что верно

Предложение 2.1. *Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке.*[3]

(De-1): Если три пары соответствующих сторон двух треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны друг другу, т. е. $AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C',\ BC \parallel B'C'$, то три прямые $AA',\ BB',\ CC'$, соединяющие соответствующие вершины этих двух треугольников, либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке.

(De-2): Если две пары соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны друг другу, скажем $AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C'$, и три прямые, соединяющие соответствующие вершины, различны и либо пересекаются в одной точке или параллельны друг другу, то третья пара соответствующих сторон также является параллельной друг другу, т. е. $BC \parallel B'C'$.

Прямое следствие аксиом Дезарга — концепт *середины* и *симметричной точки*:

Определение 3. Пусть $A \neq B$ — произвольные точки на прямой l. Построим произвольный параллелограмм $ABCD$, как мы делали ранее. Через D проведём прямую, параллельную BE и пересекающую l в точке C (см. рис. 1). Будем говорить, что точка C *симметрична точке* A *относительно* B.

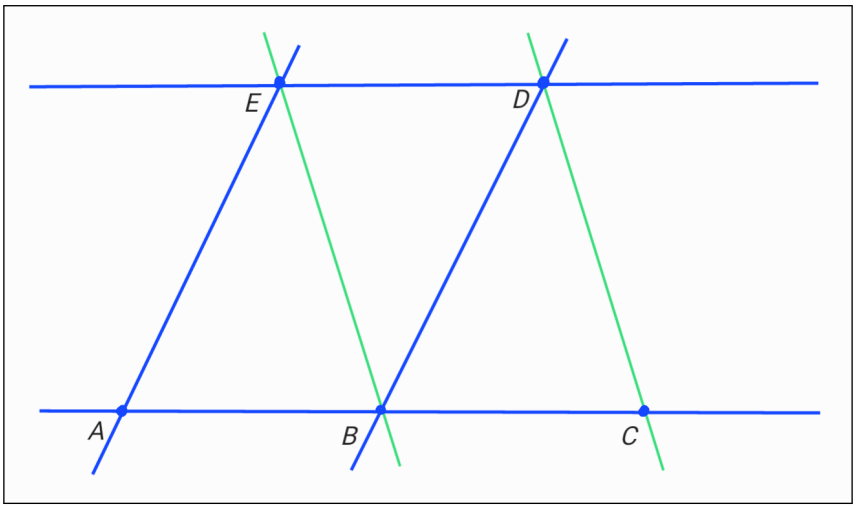

Рис. 1: A и C *симметричны* относительно B.

Аксиома бесконечности InfLines влечёт, что построенная точка C отлична от A, и с помощью аксиом Дезарга можно показать, что C не зависит от выбора параллелограмма $ABCD$. ([Wu, 2012], с. 20-22)

Предложение 2.2. *Если точка C симметрична A относительно B, то точка A симметрична C относительно B.*

Определение 4. Пусть $A \neq B$ — произвольные точки на прямой l. Проведём через A прямую l', отличную от l, и возьмём на ней точку M', отличную от A. Построим точу B', симметричную A относительно M', и проведём через M' прямую $M'M \parallel B'B$ и пересекающую l в точке M (см. рис. 2). Будем называть M *серединой* A и B.

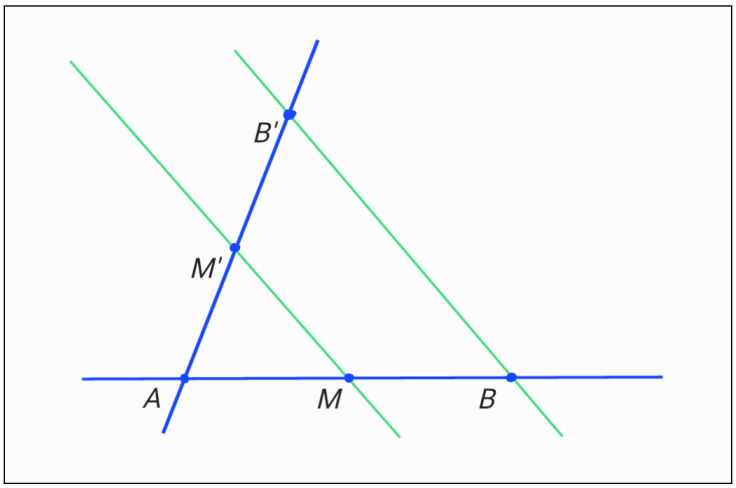

Рис. 2: M — *середина* A и B.

Аналогично, можно показать, что построенная точка M не зависит от выбора прямой l' и точки M'.

Определение 5. *Центр* параллелограмма — точка пересечения его диагоналей.

[3] [Wu, 2012], с. 19-20

Предложение 2.3. *Центр параллелограмма является серединой его противоположных вершин.*

Доказательство. [Wu, 2012], с. 24, теорема 1. □

Предложение 2.4. *Пусть четыре точки A, D, C, D — попарно различны и никакие три из них не лежат на одной прямой. Если середина A и C совпадает с серединой B и D, то $ABCD$ — параллелограмм.*

Доказательство. [Wu, 2012], с. 24., теорема 2. □

2.2 Аксиомы для ортогональности

Перечислим аксиомы для отношения ортогональности, рассматриваемые в статье [Beklemishev et al., 2020], эквивалентность которых мы будем доказывать аналогичным аксиомам для симметрии.

(O-1): $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow l_2 \perp l_1$.

(O-2): Для данной точки O и прямой l_1 существует ровно одна прямая l_2, такая что $l_1 \perp l_2$ и $O \in l_2$.

(O-3): Если $l_2 \perp l_1$ и $l_3 \perp l_1$, тогда $l_2 \parallel l_3$ или $l_2 = l_3$.

(O-4): Для любой точки O существует прямая l, такая что $O \in l$ и $l \not\perp l$ (см. замечание ниже).

(O-5): Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Замечание. В этой работе мы примем более сильную версию аксиомы O-4, что никакая прямая не перпендикулярна самой себе (или, как говорят, не является *изотропной*). Сделано это для упрощения дальнейших рассуждений.

Наше допущение не является очень критичным, поскольку затем для аксиоматизации геометрии оригами вводятся аксиомы порядка, которые исключают возможность существования изотропных прямых.

Для формулирования последней аксиомы нам необходимо дать определение симметрии двух точек относительно прямой в терминах ортогональности.

Определение 6. Для пары A, B двух различных точек проведём прямую l, проходящую через середину A и B и перпендикулярную AB. Будем называть l *серединным перпендикуляром* точек A и B и говорить, что точки A и B *симметричны* относительно l. (Положим по определению, что точки на прямой l являются симметричными самим себе).

Из аксиом для ортогональности следует, что прямая l в определении выше является единственной. Используя аксиомы ортогональности, для данной точки A и прямой l мы можем построить точку, симметричную A относительно l. По аксиоме O-2, опустим перпендикуляр на l, проходящий через точку A, и обозначим через M его пересечение с l. Теперь построим точку B, симметричную A относительно M (в смысле определения 3) — она и является искомой.

Сформулируем свойство симметрии, определённой через ортогональность, которое мы будем использовать дальше (доказательство приведено в [Wu, 2012], с. 76).

Предложение 2.5. *Если точки $A_1, A_2, \ldots$ лежат на одной прямой, то симметричные им точки $B_1, B_2, \ldots$ относительно прямой l также лежат на одной прямой.*

Определение 7. Пусть даны прямая l_1 и l_2 и пусть точки, симметричные точкам на прямой l_1 относительно l, образуют прямую l_2 (см. предложение 2.5). Будем говорить, что l_2 является *симметричной прямой* l_1 относительно l, и что l является *симметрической осью* прямых l_1 и l_2.

Наконец, последняя аксиома для ортогональности из [Beklemishev et al., 2020]:

(AxSymAx): Для любых двух пересекающихся прямых существует их симметрическая ось (см. определение 7).

3 Аксиомы для симметрии

3.1 Список аксиом

Ниже предлагаются следующие аксиомы для предиката симметрии двух точек относительно заданной прямой: (сигнатура $\{Sym^3, \in^2\}$.)

(S-0): Для данной прямой все её точки симметричны самим себе относительно этой прямой, и при том только они.

$$\forall l, A\ ((A \in l \to Sym(A, l, A)) \wedge (A \notin l \to \neg Sym(A, l, A)))$$

(S-1): Отношение $Sym(A, l, B)$ симметрично для точек.

$$\forall A, B, l\ \ (Sym(A, l, B) \to Sym(B, l, A))$$

(S-2): Для данных прямой l и точки A существует единственная точка B, симметричная A относительно l.

$$\forall A, l \exists! B\ Sym(A, l, B)$$

(S-3a): Для любых двух различных точек A и B, существует единственная прямая l, относительно которой они симметричны. Прямую l будем называть *серединным перпендикуляром* точек A и B.

$$\forall A, B\ (A \neq B \to \exists! l\ Sym(A, l, B))$$

(S-3b): Для противоположных вершин параллелограмма серединный перпендикуляр проходит через его центр (см. предложение 2.1 и определение 5).

$$\forall A, B, C, D, l\ (AB \parallel CD \wedge BC \parallel AD \wedge Sym(A, l, C)) \to AC \cap BD \in l$$

(S-4): Для данных пар точек (A_1, B_1) и (A_2, B_2), симметричных относительно заданной прямой l, прямые A_1A_2 и B_1B_2 являются также симметричными относительно прямой l.

$$\forall l, A_1, A_2, B_1, B_2\ (Sym(A_1, l, B_1) \wedge Sym(A_2, l, B_2) \to \\ \to (\forall P \in A_1A_2 \exists P' \in B_1B_2\ Sym(P, l, P')))$$

(S-5): Для данных прямых l_1 и l_2, пересекающихся в точке O, и для любой точки A, если B — точка, симметричная A относительно l_1, и C — точка, симметричная B относительно l_2, то серединный перпендикуляр для A и C проходит через O.

$$\forall l_1, l_2, O, A, B, C, l\ (l_1 \cap l_2 = O \wedge Sym(A, l_1, B) \wedge Sym(B, l_2, C) \wedge Sym(A, l, C)) \to O \in l$$

(S-6): Для данных пересекающихся прямых существует их симметрическая ось.

$$\forall k, m, O\ ((O \in k \wedge O \in m) \to (\exists l \forall P \in k \exists P' \in m\ Sym(P, l, P')))$$

Отметим, что все перечисленные выше положения сформулированы в языке первого порядка (соответствующие формулы предоставлены) и нетрудно верифицируемы с точки зрения оригами. Поэтому, в определённом смысле, приведённую аксиоматику можно считать *естественной*.

3.2 Первые следствия

Выведем несколько простых следствий из наших аксиом, которые нам понадобятся дальше, и определим ортогональность прямых.

Предложение 3.1. *Отношение $Sym(A, l, B)$ симметрично для прямых.*

$$\forall k, l, m\ ((\forall A \in k \exists A' \in m\ Sym(A, l, A')) \to (\forall A \in m \exists A' \in k\ Sym(A, l, A')))$$

Доказательство. Возьмём две различные точки A и B на прямой k (по аксиоме I-2 такие должны быть), и пусть A' и B' – симметричные им точки относительно l соответственно (они единственны в силу S-2). Заметим, что $A' \neq B'$, поскольку иначе получили бы противоречие с аксиомой S-2. Тогда, применяя аксиому S-4 для пар (A', A) и (B', B), получаем нужное заключение импликации (поскольку, по I-1, $AB = l$ и $A'B' = k$).

□

Предложение 3.2. *Для данных прямых l и m существует единственная прямая k, симметричная m, относительно l.*

$$\forall m, l \exists! k\ (\forall A \in m\ \exists B \in k\ Sym(A, l, B))$$

Доказательство. Аналогично, выберем $A \neq B$ на прямой m, и A', B' — их единственные симметричные образы относительно l. Возьмём в качестве k прямую $A'B'$. По аксиоме S-4a для пар (A, A') и (B, B'), требуемое условие выполнено. Единственность очевидна из I-1 и S-2.

□

Наконец, мы готовы дать определение перпендикулярных прямых:

Определение 8. Прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2, если l_1 при симметрии относительно l_2 переходит в себя.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow l_1 \neq l_2 \wedge (\forall A, A'\ (A \in l_1 \wedge Sym(A, l_2, A') \to A' \in l_1))$$

Предложение 3.3. *Для данных прямой l и точек A и A', симметричных относительно l, прямая AA' при симметрии относительно l переходит в себя.*

$$\forall A, A', l\ (Sym(A, l, A') \to (\forall B \in AA', B'\ (Sym(B, l, B') \to B' \in AA')))$$

Иными словами, $AA' \perp l$.

Доказательство. Применим аксиому S-4 для пар (A, A') и (A', A). □

Предложение 3.4. *Серединный перпендикуляр двух точек проходит через их середину (см. определение 4).*

Доказательство. Пусть даны точки A и B. Возьмём точку $M' \notin AB$ и построим точку B', симметричную A относительно M' (рис. 3). Проведём $MM' \parallel BB'$; по определению, M — середина A и B.

Теперь рассмотрим точку A', симметричную B' относительно M в смысле определения 3. Имеем: M – середина A и B, а также середина B' и B. Значит, по предложению 2.4, $AB'BA'$ — параллелограмм, M — точка пересечения его диагоналей, отсюда серединный перпендикуляр противоположных вершин A и B, по аксиоме S-3b, проходит через M.

□

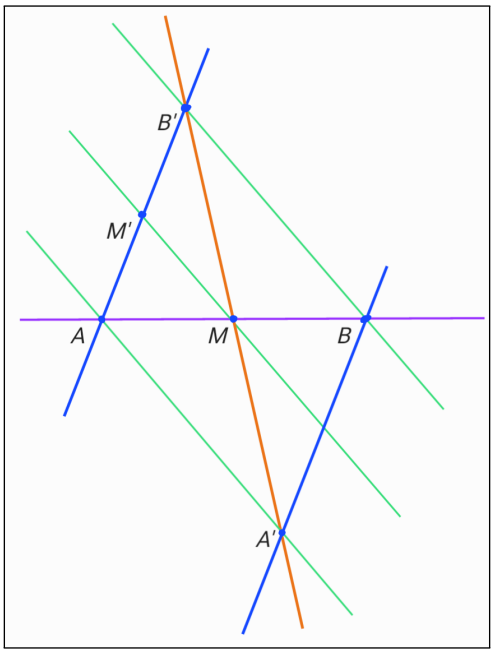

Рис. 3: к предложению 3.4.

4 Эквивалентность аксиом ортогональности и симметрии

В этом разделе мы покажем, что аксиоматика для отношения ортогональности, приведённая в разделе 2.2, и аксиоматика для отношения симметрии двух точек относительно прямой, приведённая в разделе 3.1, являются эквивалентными по модулю аксиом абсолютной геометрии, приведённых в разделе 2.1.

4.1 Вывод $\perp$ из Sym

Определим перпендикулярность прямых через симметрию (см. определение 8). Возьмём за основу аксиомы абсолютной геометрии из раздела 2.1 и приведённые мною аксиомы для симметрии из раздела 3.1, и покажем, что для заявленного выше отношения ортогональности выполняются все свойства (O-1)-(O-5), (AxSymAx) из раздела 2.2.

Не зная симметричности ортогональности, сначала докажем O-3.

(O-3). Если l_2 и l_3 не имеют общих точек, то имеем случай $l_2 \parallel l_3$. Пусть найдётся такая точка O, что $O \in l_2$ и $O \in l_3$.

Если $O \notin l_1$ то точка O', симметричная точке O относительно l_1 ($O \neq O'$ по S-0), в виду определения и аксиомы S-2, должна принадлежать и l_2, и l_3, а значит, в силу аксиомы инцидентности I-1, $OO' = l_2 = l_3$.

Если $O \in l_1$, то возьмем две различные точки A и A' на прямой l_2, отличные от O и симметричные друг другу относительно l_1 (по S-0 мы можем так сделать). Аналогично положим B и B' — различные точки на прямой l_3, симметричные друг другу относительно l_1. Тогда, по аксиомам инцидентности, $AA' = l_2$, $BB' = l_3$.

По предложению 3.4, l_1 — это единственный серединный перпендикуляр A и A', проходящий через середину $M \in AA'$. По S-0, M должно неизбежно совпасть с O (поскольку M и O — обе неподвижные точки при симметрии). Аналогично, O — середина BB', значит, по признаку 2.4, $ABA'B'$ — параллелограмм. По S-4, прямые $A'B$ и AB' являются симметричными относительно l_1, и, более того, обе должны быть ей параллельны (если $X \in l_1$ и $X \in A'B$, то, по S-0, $X \in AB'$, хотя $A'B$ и AB' — противоположные стороны параллелограмма).

Значит, из абсолютной геометрии, прямые AB и $A'B'$ пересекают l_1 в точках X и X' соответственно, но, ввиду S-4, AB и $A'B'$ симметричны, то $X = X'$. То есть прямые AB и $A'B'$ пересекаются, хотя это также противоположные стороны параллелограмма. Таким образом, $l_2 = l_3$.

(O-1). Докажем сначала небольшую лемму:

Лемма 1. *Если $l \perp k$, то k и l пересекаются.*

Доказательство. В самом деле, возьмём точку $A \in l$ и её образ $A' \in l$, отличный от A. Тогда M — середина точек A и A' — лежит на l. По предложению 3.4, серединный перпендикуляр AA' проходит через M и, ввиду единственности, должен совпадать с k. Таким образом, $l \cap k = M$.

□

Докажем симметричность ортогональности. Предположим, что $k \perp m$ и возьмём произвольную точку A на m. Если точка B — симметричная A относительно k — лежит на m, то всё доказано.

Предположим, что $B \notin m$. Тогда построим точку C, симметричную B относительно m. По построению и в виду предложения 3.3, $BC \perp m$, поэтому, по уже доказанному нами свойству (O-3), имеем $BC \parallel k$ (см. рис. 4; направления стрелок показывают, какая прямая перпендикулярна какой). Также, по предложению 3.3, $AB \perp k$.

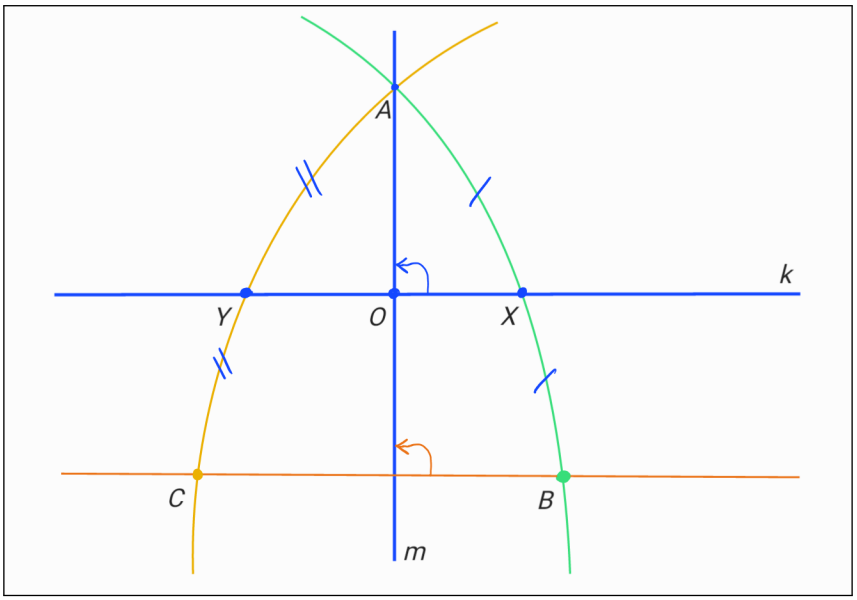

Рис. 4: к доказательству O-1.

По лемме 1, обозначим пересечения $AB \cap k = X$ и $k \cap m = O$. По предложению 3.4, X — середина A и B. Поскольку $BC \parallel k$, и прямая AC пересекает прямую BC, то прямая AC также должна пересекать прямую k ($k \cap BC = Y$).

Так как X — середина A и B и $BC \parallel k$, то Y — середина A и C. Положим l — серединный перпендикуляр A и C. По предложению 3.4, $Y \in l$. Но в то же время, по аксиоме S-5 для $k \cap m = O$ и $Sym(A, k, B) \wedge Sym(B, m, C)$, имеем $O \in l$. Значит, по аксиомам инцидентности, $l = OY = k$.

Таким образом, $Sym(A, k, B)$ и $Sym(A, k, C)$, значит, по аксиоме S-2, $B = C$ и, по аксиоме S-0, $B \in m$, хотя изначально мы предположили обратное.

Проверка корректности. Следующие предложение показывает корректность определения серединного перпендикуляра двух точек, данного в аксиоме S-3a.

Предложение 4.1. *Серединный перпендикуляр точек A и B перпендикулярен прямой AB.*

Доказательство. Пусть l — серединный перпендикуляр A и B, то есть $Sym(A, l, B)$. По предложению 3.3, $AB \perp l$, и, по доказанной симметричности, $l \perp AB$.

□

(O-2). Пусть даны точка O и прямая l. Если $O \notin l$, то тогда прямая OO' (где O' — точка, симметричная O относительно l) есть искомая (благодаря предложению 3.3).

Единственность следует так: если $m \perp l$, то, по определению, точка O' — единственный образ O по аксиоме S-2 — должна принадлежать m, но, по аксиоме инцидентности I-1, через две точки проходит только одна прямая.

Если $O \in l$, то рассмотрим какую-нибудь точку $A \in l$ (по аксиоме I-2 такая найдётся). Пусть $A' \in l$ — точка, симметричная A относительно O (в смысле более раннего определения 3). Тогда O — середина A и A'. По аксиоме S-3a и предложению 3.4, серединный перпендикуляр A и A' проходит через O, и, по предложению 4.1, он перпендикулярен $AA' = l$.

Единственность следует из уже доказанного O-3.

(O-4). Наше определение ортогональности первым конъюнктивным членом запрещает существование изотропных прямых. То есть любая прямая, по определению 8, не ортогональна сама себе.

(O-5). Заметим, что верно следующее

Предложение 4.2. *Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Сначала покажем, что два серединных перпендикуляра, восстановленных к сторонам треугольника, хотя бы пересекаются.

Пусть дан треугольник ABC и прямые k, m — серединные перпендикуляры A, B и A, C соответственно. По предложению 4.1, $k \perp AB$ и $m \perp AC$. Предположим, что $k \parallel m$. Положим, в виду предложения 3.4, M и M' — соответствующие середины (см. рис. 5).

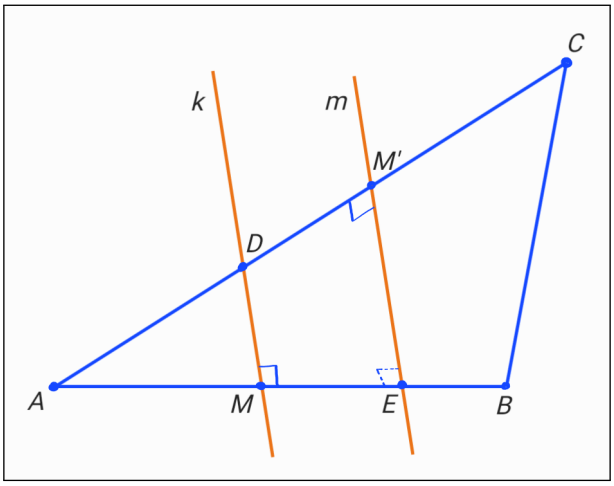

Рис. 5: к доказательству 4.2.

Если треугольник ABC прямоугольный, то серединные перпендикуляры, восстановленные к катетам, будут им соотвественно параллельны (ввиду уже доказанного нами O-3). Тогда два эти серединных перпендикуляра с неизбежностью пересекаются, поскольку верен такой факт: если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекают и другую.

Если прямого угла в ABC нет, то пусть k пересекает AC в точке D (если $k \parallel AC$, то восстановим перпендикуляр l в точке A к AB; тогда, по O-3, $l \parallel k$, а значит, по ParAx, $l = AB \perp AC$, т. е. треугольник прямоугольный), m пересекает AB в точке E (аналогично).

Опустим из M' перпендикуляр l на прямую AB (по O-2 мы уже можем так сделать). Поскольку $M' \neq D$ (мы предположили, что перпендикуляры не пересекаются), $l \perp AB$ и $m \perp AB$, то $l \parallel k$. Применяя аксиому параллельных ParAx для прямой k и точки M', имеем $l = m$. Таким образом, $m \perp AB$, или, что то же самое ввиду доказанного O-1, $AB \perp m$.

Поскольку $AB \perp m$ и $AC \perp m$, то $AB = AC$ или $AB \parallel AC$, что неверно по построению.

Возвращаясь к доказываемому предложению: пусть l_1 и l_2 — серединные перпендикуляры AB и BC, пересекающиеся в точке O, соответственно. Заметим, что B —

точка, симметричная A относительно l_1, и C — точка, симметричная B относительно l_2, значит, по аксиоме S-5, серединный перпендикуляр A и C проходит через O.

□

Пусть дан треугольник ABC и мы хотим показать, что его три высоты AH_1, BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке. Убедимся в истинности следующей

Лемма 2. *Если прямые k и m параллельны и из точки $O \in k$ опущен перпендикуляр l на m, то неизбежно $l \perp k$.*

Доказательство. Восстановим перпендикуляр k' к прямой l в точке O. Поскольку $k' \perp l$ и $m \perp l$, то, в виду O-3, $k' \parallel m$. Применяя аксиому параллельных для прямой m и точки O, получаем $k' = k$, то есть $k \perp l$. □

Теперь проведём через вершину A треугольника ABC прямую, параллельную BC, через вершину B — параллельную AC и через вершину C — параллельную AB. Обозначим соответствующие пересечения через A', B и C' (см. рис. 6).

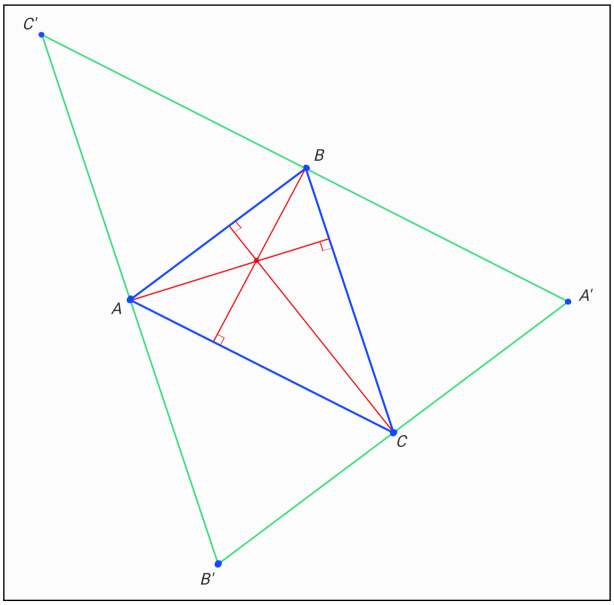

Рис. 6: к доказательству O-5.

Заметим, что по построению, точка B' является симметричной C' относительно A, точка A' — симметричной B' относительно C, точка C' — симметричной A' относительно B, или, что то же самое, A является серединой B' и C', C — серединой A' и B', B — срединой A' и C'. Значит, серединные перпендикуляры треугольника ABC, в силу предложения 3.4 и леммы 2, являются его высотами.

По предложению 4.2, серединные перпендикуляры треугольника $A'B'C'$ пересекаются в одной точке, а значит также и высоты треугольника ABC.

4.2 Вывод Sym из $\perp$

Определим отношение симметрии двух точек относительно прямой через ортогональность. (см. определение 6). Возьмём за основу аксиомы абсолютной геометрии из раздела 2.1 и аксиомы для ортогональности из раздела 2.2, и покажем, что для заявленного отношения симметрии выполняются все свойства (S-0)-(S-6) из раздела 3.1.

(S-0), (S-1a), (S-2). Очевидно следуют из определения симметричности и из единственности соответствующего перпендикуляра.

(S-3a), (S-3b). См. определение 6. По предложению 2.3, точка пересечения M диагоналей параллелограмма является серединой его противоположных вершин, поэтому серединный перпендикуляр, очевидно, по построению проходит через M.

(S-4). Прямое следствие предложения 2.5.

(S-5). Заметим, что l_1 и l_2 являются серединными перпендикулярами к A, B и B, C соответственно. В тоже время, из данных определений в разделе 2.2 и аксиом ортогональности, выполнено

Предложение 4.3. *Серединные перпендикуляры треугольника, восстановленные к его сторонам, пересекаются в одной точке.*[4]

Следовательно, если случай вырожден, т. е. $A = O$, то утверждение очевидно; иначе, применяя данное предложение к треугольнику ABC, получаем, что серединный перпендикуляр A и C проходит через O.

(S-6). Аксиома AxSymAx.

5 Заключение

Таким образом, в разделе 4 мы показали эквивалентность новых аксиом для симметрии и использованных в [Beklemishev et al., 2020] аксиом ортогональности для аксиоматизации плоскости оригами. Поэтому теперь мы можем заменить ортогональность в аксиоматике геометрии оригами на более естественное отношение симметрии, и, как итог, имеем следующую замечательную теорему:

Теорема 1. *Теория T_{Sym} в языке $\{Sym^3, \in^2\}$ упорядоченной плоскости оригами By, получающийся из аналогичной $T_\perp$ из [Beklemishev et al., 2020] заменой аксиом (O-1)–(O-5), (AxAsAx) для $\perp$ на аксиомы (S-0), ..., (S-6) для Sym, является неразрешимой.*

Доказательство. Ранее, в разделе 4 мы доказали ни что иное, как интерпретируемость $T_\perp$ в T_{Sym} и интерпретируемость T_{Sym} в $T_\perp$. То есть, теории T_{Sym} в $T_\perp$ являются взаимно интерпретируемыми. А поскольку, как было доказано в теореме 6 из [Beklemishev et al., 2020], теория $T_\perp$ неразрешима, то и T_{Sym} является таковой. □

В заключение можно отметить ещё одно использование полученного результата в данной курсовой работе: если мы работали с ортогональностью как базовым понятием и у нас возникла потребность заменить его на симметричность, то при условии наличия аксиом абсолютной геометрии теперь это можно сделать без особых трудностей.

[4] [Wu, 2012], с. 75

Список литературы

[Beklemishev et al., 2020] Beklemishev, L., Dmitrieva, A., and Makowsky, J. (2020). Axiomatizing origami planes.

[Friedman and Goob, 2018] Friedman, M. and Goob (2018). *History of Folding in Mathematics*. Springer.

[Hallett and Majer, 2004] Hallett, M. and Majer, U. (2004). *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry 1891–1902*, volume 1. Springer Science & Business Media.

[Hilbert, 2013] Hilbert, D. (2013). *Grundlagen der geometrie*. Springer-Verlag.

[Huzita, 1989] Huzita, H. (1989). Axiomatic development of origami geometry. In *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989*, pages 143–158.

[Justin, 1989] Justin, J. (1989). Résolution par le pliage de l'équation du troisieme degré et applications géométriques. In *Proceedings of the first international meeting of origami science and technology*, pages 251–261. Ferrara, Italy.

[Wu, 2012] Wu, W.-t. (2012). *Mechanical theorem proving in geometries: Basic principles*. Springer Science & Business Media.